LOGARITHMES & EXPONENTIELLES



Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

> Existe-t'il 2 entiers naturels a et b tels que
> $$a^b = b^a \quad ?$$
> Trouvez-les tous.

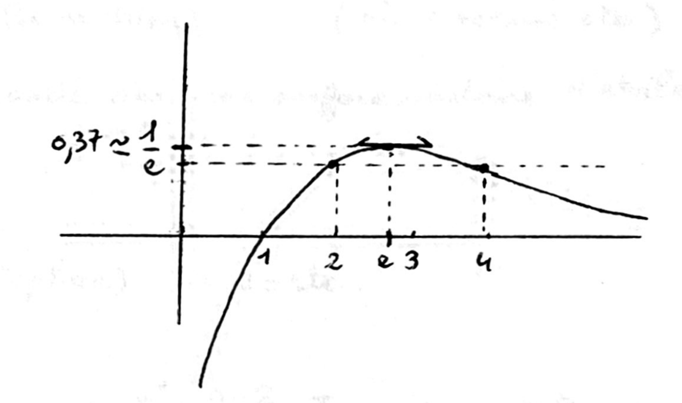
Si $a = b$, l'égalité est vérifiée. Supposons maintenant $a \neq b$.

$$a^b = b^a \iff \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$$

Etudions la fonction $f(x) \doteq \frac{\ln x}{x}$.

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ et :

x	0		e		$+\infty$
f'	‖	+	0	−	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e} \simeq 0{,}37$	↘	0_+



Le graphique montre que $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}$, ne sera possible que si a (ou b) égale 2.

On résout ensuite l'équation $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$.

1-solution : on constate que $f(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$, et l'étude des variations de f prouve que

$$f(x) = f(2) \iff x = 2 \text{ ou } 4$$

2-solution : si on ne le voit pas, on étudie $\varphi(x) \doteq 2\ln x - x\ln 2$.

$\varphi'(x) = \frac{2 - \ln 2 . x}{x}$ donc

	0		$\frac{2}{\ln 2} \simeq 2{,}8$		
φ'	‖	+	0	−	
φ	‖ $-\infty$	↗	$\simeq 0{,}12$	↘	$-\infty$

et l'on essaie d'encadrer la racine de $\varphi(x) = 0$ telle que $x > \frac{2}{\ln 2}$. On tombe alors sur 4 tel que $\varphi(4) = 0$.

(ref : je m'aperçois cet exercice est apparu dans un pb, le 108 p 102 de Terracher TCE92, II)

Obj. :
- Étude d'une fct. dérivée de e^x
- Calcul d'int. par int. par parties
- Appl. à l'astrophysique.

Loi du rayonnement stellaire :

L'intensité d'une radiation provenant d'une étoile est fonction de la température T (en °K) et de la longueur d'onde λ du rayonnement (ie de sa couleur) :

$$I_\lambda = \frac{a}{\lambda^5} e^{-\frac{b}{\lambda T}}$$ a, b constantes positives (Loi de Planck)

a) Soit T une température donnée. L'intensité I_λ est maximale pour une longueur d'onde λ_m. Établir la relation :

$$\lambda_m T = c$$ (loi de Wien) (où c est une cte)

b) L'énergie totale E émise par seconde par une surface unitaire d'étoile est $E = \int_0^\infty I_\lambda \, d\lambda \doteq \lim_{\substack{A \to +\infty \\ \varepsilon \to 0_+}} \int_\varepsilon^A I_\lambda \, d\lambda$

Montrer que $E = d.T^4$ (loi de Stephan) où d = Cte.

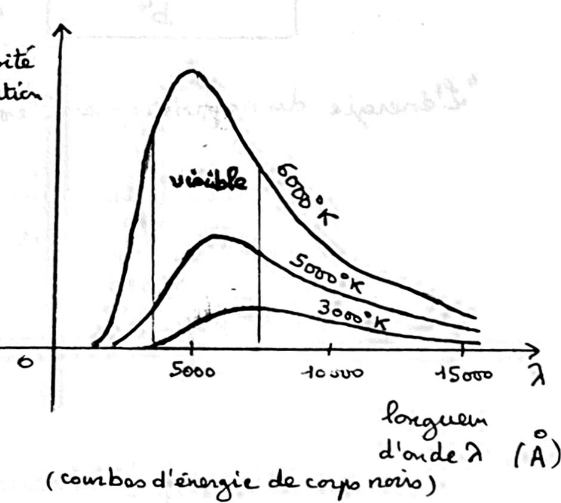
Pour cela, on pourra :

* Poser $J_n = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{k}{x}}}{x^n} dx$ (où k>0) et montrer que $J_n = \frac{n-2}{k} J_{n-1}$ pour $n \geq 3$ en utilisant une intégration par parties.
* En déduire J_5, puis E.

Prolongements : Donner l'allure de quelques courbes rep. de $\lambda \mapsto I_\lambda$ pour des val. diff. de T, et constater que lorsque T croît :

(l'étude a été amorcée au a), et permet d'utiliser la limite : $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$ au prog. de Terminale)

- l'énergie E émise croît (c'est l'aire sous la courbe)
- le sommet de la courbe se déplace vers la gauche (loi de Wien)



(courbes d'énergie de corps noirs)

(réf. TCE Istra 83, 58 p193)

---

a) On étudie la fct $\lambda \mapsto I_\lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$: posons $f(\lambda) = I_\lambda$.

$f'(\lambda) = \frac{ab - 5aT\lambda}{\lambda^7 T} . e^{-\frac{b}{\lambda T}}$ s'annule en $\lambda = \frac{b}{5T}$ qui correspond bien à un maximum. Ainsi $\boxed{\lambda_m T = \frac{b}{5}}$ est une constante.

b)

$$* \quad J_n = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{k}{x}}}{x^n}\,dx = \underbrace{\left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\,e^{-\frac{k}{x}}\right]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\cdot\frac{k}{x^2}\,e^{-\frac{k}{x}}\,dx \qquad (\text{où } n \neq 1)$$

$$J_n = \frac{k}{n-1}\,J_{n+1}$$

d'où $J_{n+1} = \dfrac{n-1}{k}\,J_n \Rightarrow \boxed{J_n = \dfrac{n-2}{k}\,J_{n-1}}$ pour $n \neq 2$.

* On déduit :

$$J_5 = \frac{3}{k}\cdot J_4 = \frac{3}{k}\cdot\frac{2}{k}\cdot\frac{1}{k}\cdot J_2 \quad \text{et} \quad J_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{k}{x}}}{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{k}\,e^{-\frac{k}{x}}\right]_0^\infty = \frac{1}{k}$$

donc $J_5 = \dfrac{6}{k^4}$

* Enfin :

$$E = \int_0^\infty I_\lambda\,d\lambda = \int_0^\infty \frac{a\,e^{-\frac{b}{\lambda T}}}{\lambda^5}\,d\lambda = a\cdot\frac{6}{\left(\frac{b}{T}\right)^4} = \frac{6a}{b^4}\cdot T^4$$

$$\boxed{E = \frac{6a}{b^4}\cdot T^4}$$

"L'énergie du rayonnement est donc proportionnelle à T^4 ".

Montrer que pour tout $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

* Récurrence sur n : C'est trivial si $n = 0$. Au rang n, posons :

$$\varphi_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$\varphi_n'(x) = e^x - \left(1 + x + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) \doteq \varphi_{n-1}(x)$$

Par hypothèse récurrente, $\varphi_{n-1}(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, donc φ_n sera croissante. Comme $\varphi_n(0) = 0$, on aura :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \varphi_n(x) \geq 0$$

* On a : $e^x \geq 1 + x + \dots + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\frac{e^x}{x^n} \geq \underbrace{\frac{1}{x^n} + \dots + \frac{1}{x\,(n-1)!}}_{\to 0} + \frac{1}{n!} + \underbrace{\frac{x}{(n+1)!}}_{\to +\infty}$$

Objectif : - motiver l'emploi du raisonnement par récurrence
- étudier des fcts où interviennent e^x
- retrouver une limite du cours.
- employer la notion de dérivée, pour obtenir les variations d'une fonction et en déduire une inégalité.

Dans un système d'intérêts simples, 1 F rapporte des intérêts de i F en un an. Ainsi, 1 F rapporte $\frac{i}{n}$ francs en une durée de $\frac{1}{n}$ année. On dit que le "taux nominal i est capitalisé n fois dans l'année" si au bout de $\frac{1}{n}$ année, les intérêts acquis sont ajoutés au capital, le nouveau capital portant des intérêts simples au même taux pendant $\frac{1}{n}$ année, et ainsi de suite pendant 1 an.

1) Mq, si un placement est fait au taux nominal i capitalisé n fois dans l'année, la valeur acquise par 1 F est :

$$u_n = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$$

Construire un tableau de valeurs de u_n pour $i = 0,12$ et $n = 2, 3, 4, 6, 120, 360$.

2) Etude de $f(x) = \left(1 + \frac{i}{x}\right)^x$

a) Posons $g(x) = \ln f(x)$. Calculer les dérivées $g'(x)$ et $g''(x)$. Etudier les variations de $g'(x)$, en déduire son signe et le sens de variation de $g(x)$.

b) Donner le tableau de variation de f. Tracer sa courbe représentative. Trouver la tangente à cette courbe en $A(0,1)$

trop dur en Terminale. A admettre

3) Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$? Quel est son plus petit majorant ?

Prolongements :

4) Si $i = 0,12$, peut-on trouver le nombre de capitalisations n nécessaire pour que l'intérêt de 1 F en 1 an soit supérieur à 0,125 F ? à 0,13 F ?

5) i étant fixé, à quelles conditions peut-on trouver n pour que, avec ce taux nominal capitalisé n fois dans l'année, l'intérêt de 1 F en un an soit supérieur à j ? (j donné à l'avance)

(réf. Iotra 83, TCE, 25 p 205)

1) $1 \xrightarrow{\times(1+\frac{i}{n})} 1+\frac{i}{n} \to (1+\frac{i}{n})^2 \qquad\qquad (1+\frac{i}{n})^n$

$\longleftrightarrow$ $\frac{1}{n}$ an $\longleftrightarrow$ $\frac{1}{n}$ an

2.a) $z(x) = x \ln\left(1+\frac{i}{x}\right)$

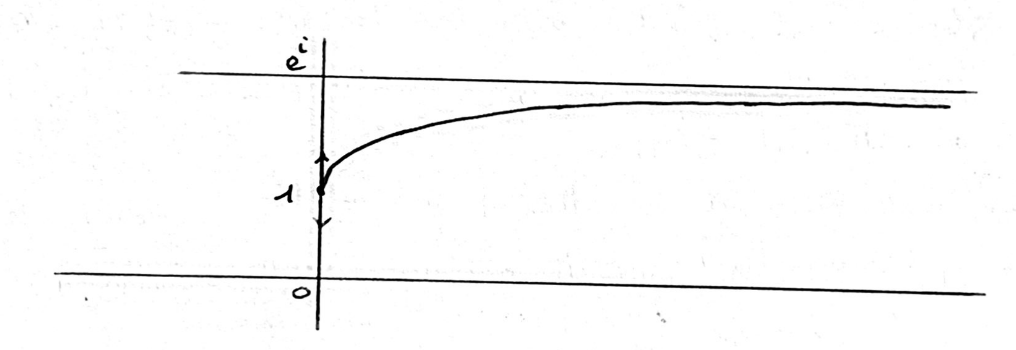
$z'(x) = \ln\left(1+\frac{i}{x}\right) - \frac{i}{x+i}$

$z''(x) = \frac{-i^2}{x(x+i)^2} < 0$

Ainsi z' décroît sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme $\lim_{x\to+\infty} z'(x) = 0$, on trouve :

x	0	$+\infty$
z'	+	
z	0 ↗	i

2.b) $f(x) = e^{z(x)}$ sera aussi croissante. On prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.



x	0	$+\infty$
f	1 ↗	e^i

* Un développement limité donne :

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)-1}{x} = +\infty$$

(En effet : $\ln f(x) = x\ln\left(1+\frac{i}{x}\right) = x\ln(x+i) - x\ln x$

$\ln f(x) = x\ln i + x\ln\left(1+\frac{x}{i}\right) - x\ln x$

$= x\ln i + x\left(\frac{x}{i} + o(x)\right) - x\ln x$ (au vois. de 0)

$= x\ln i - x\ln x + o(x)$

donc $f(x) = e^{x\ln i - x\ln x + o(x)} = 1 + x\ln i - x\ln x + o(x)$ { faux. Voir p4

et $\frac{f(x)-1}{x} = \ln i - \ln x + o(1) \longrightarrow +\infty$ $(x\to 0)$)

3) (u_n) croît et $\lim_{n \to +\infty} u_n = e^i$, donc $\text{Sup}\, u_n = e^i$

Prolongements :

4) Trouver n tq $\left(1+\frac{i}{n}\right)^n - 1 \geq 0,125$

ie $f(n) = \left(1+\frac{i}{n}\right)^n \geq 1,125$

C'est possible : $1,125 < \text{Sup}\, u_n = e^i = e^{0,12} \simeq 1,1274$

Il n'est par contre pas possible d'obtenir $f(n) \geq 1,13$.

5) $f(n) - 1 \geq j \iff f(n) \geq 1+j$

La condition cherchée est $1+j < e^i$, ie $j < e^i - 1$.

NB : $e^i - 1$ s'appelle le "taux différentiel du taux i". Il apparait comme le taux maximum (calculé sur 1 an) pouvant être approché en augmentant le nombre n de capitalisations dans l'année au taux nominal i.

On notera que : $i \leq e^i - 1$

et que les 2 situations sont équivalentes :
- taux nominal i capitalisé une infinité de fois dans l'année
- taux $e^i - 1$ sur l'année (intérêts simples)

Objectifs : - Mettre en oeuvre les fcts ln et exp. dans un domaine appartenant à l'économie
- Les prolongements permettent de mieux comprendre le sens de ce travail.

Contexte : - Terminale C
- Dans les prog. du 17 mai 90, BO n° 20, il n'y a plus d'étude des dév. limités (sauf à l'ordre 1). La question de la tgte en A(0,1) les utilise. Elle est difficile. On la ré-écrira avec $x\,\varepsilon(x)$ à la place de $o(x)$...

<u>Remarque</u> : $\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x)-1}{x} = +\infty$ est montré, p2, en substituant un développement asymptotique dans l'échelle $(x^\alpha \ln^\beta x)_{\alpha,\beta}$ dans un développement limité. On obtient alors un dével. asympt. dans l'échelle $(x^\alpha \ln^\beta x)_{\alpha,\beta}$, à priori, et non un dév. limité (cf Ramis III .5.2.7)

Retournons à ce calcul p 2 :

$$\begin{cases} f(x) \underset{0}{=} e^{x \ln i - x \ln x + o(x)} \\ e^h \underset{0}{=} 1 + h + o(h) \end{cases}$$

entraînent :

$$f(x) = 1 + (x \ln i - x \ln x + o(x)) + \underbrace{o(x \ln i - x \ln x + o(x))}_{o(x) + o(x \ln x) + \underbrace{o(o(x))}_{= o(x)}}$$

$$= 1 + x \ln i - x \ln x + o(x) + o(x \ln x)$$

$$= 1 + x \ln i - x \ln x + o(x \ln x)$$

et alors $\frac{f(x)-1}{x} = \ln i - \ln x + o(\ln x)$ ne permet pas de conclure !

Il faut un dév. limité de e^h à l'ordre 2 :

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

d'où :

$$f(x) = 1 + (x \ln i - x \ln x + o(x)) + \frac{1}{2}(x \ln i - x \ln x + o(x))^2 + o(h^2)$$

ici $o(h^2) = o(x^2 \ln^2 i + x^2 \ln^2 x - 2x^2 \ln i \ln x + o(x))$

$$= o(x^2 \ln^2 x) - o(x^2 \ln x) + o(x) = o(x)$$

donc :

$$f(x) = 1 + x \ln i - x \ln x + \frac{1}{2}(x^2 \ln^2 i + x^2 \ln^2 x - 2x^2 \ln i \ln x) + o(x)$$

$$\frac{f(x)-1}{x} = \ln i \underbrace{- \ln x}_{\substack{\to +\infty \\ (x \to 0)}} + \underbrace{\frac{1}{2}(x \ln^2 i + x \ln^2 x - 2x \ln i \ln x) + o(1)}_{\to 0 \ (x \to 0)}$$

et l'on obtient bien : $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{x} = +\infty$.

CQFD